LA TURBULENCE

Marcel Lesieur

La Collection Grenoble Sciences

La Collection Grenoble Sciences fut créée à l'Université Joseph Fourier avec un triple objectif :

– permettre d'offrir aux étudiants et usagers des ouvrages à des prix convenables,
– constituer une mémoire pour d'excellents documents qui restent souvent chez leurs auteurs,
– réaliser des ouvrages correspondant vraiment à un objectif clair, en contrepoint des ouvrages réalisés par rapport à tel ou tel programme plus ou moins officiel.

Les documents sont, pour la plupart, publiés dans le seul cadre de l'Université Joseph Fourier. Ceux qui sont destinés à un plus vaste public sont sélectionnés, critiqués par un comité de lecture et édités dans cette collection spécifique des Presses Universitaires de Grenoble.

Directeur de la Collection Grenoble Sciences

Comité de lecture de LA TURBULENCE :

Déja parus :

EXTRAITS

donnée par Navier[4]. Considérons par exemple dans le fluide une "zone de mélange" (on dira aussi couche de mélange) d'épaisseur Δ entre deux courants parallèles de vitesse différente U_1 et U_2 (figure 2).

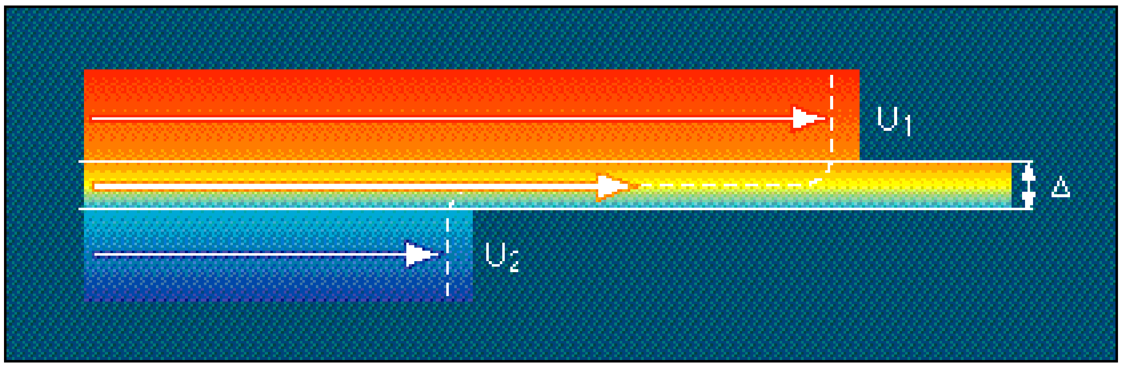

Figure 2 - Zone de mélange entre deux courants.

Dans un fluide Newtonien, la couche supérieure entraînera la couche inférieure avec une contrainte proportionnelle à $(U_1 - U_2) / \Delta$. Une contrainte est une force divisée par une surface sur laquelle elle s'exerce, de la même manière que la pression est une force par unité de surface.

- Le coefficient de proportionnalité, , est appelé la "viscosité dynamique",
- Le coefficient $\nu =$ $/ \rho$ est appelé "viscosité cinématique".

Physiquement, les forces visqueuses correspondent à des variations de quantité de mouvement de la parcelle fluide par diffusion moléculaire à travers son enveloppe. Si la parcelle est plus rapide que son environnement, les molécules allant vers l'extérieur (rapides) seront remplacées par des molécules plus lentes venant de l'extérieur ; la parcelle fluide perdra donc de la quantité de mouvement par diffusion moléculaire si elle est plus rapide (ce qui tend à la ralentir), et en gagnera si elle est plus lente (ce qui tend à l'accélérer).

On peut ainsi, par bilan de quantité de mouvement, obtenir après l'équation de continuité une *deuxième équation du mouvement* pour le fluide. C'est une équation vectorielle liant la vitesse $\vec{u}$, la masse volumique ρ et la pression p. On l'appelle l'*équation de Navier-Stokes*[5].

---

4 L. Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, présenté à l'Académie des Sciences, Paris (1822). Louis Navier, Polytechnicien et Ingénieur du corps des Ponts et Chaussées, fut professeur de mathématiques dans ces deux écoles. Je précise que j'ai emprunté un certain nombre de références historiques à l'excellent livre de H. Rouse et S. Ince, *History of Hydraulics*, Presses du Iowa Institute of Hydraulic Research (1957).

5 *Pros...* Nous l'écrivons ici dans le cadre d'une simplification très fréquente, où la viscosité dynamique est supposée constante (ceci est correct si l'écoulement n'est pas trop compressible ou trop chauffé)

Dans le cas du voilier, la mécanique des fluides intervient aussi par la résistance à l'avancement exercée par l'eau sur la coque, et due essentiellement aux vagues formées à l'étrave.

Le lift d'une balle de tennis est un autre exemple : si l'on se place dans un repère lié à la balle (voir figure 9), l'air dans la partie supérieure de la balle, qui tend par viscosité à être entraîné dans son mouvement de rotation, sera ralenti par celle-ci. L'air de la partie inférieure sera accéléré. Ici, la portance sera négative, dirigée vers le bas. Une balle liftée peut donc être lancée vers le haut avec force, elle sera rappelée vers le sol par cette portance négative. L'effet opposé, qui consiste à couper la balle ("slice"), permet, en faisant tourner la balle dans l'autre sens, d'obtenir une portance positive. On peut ainsi obtenir des balles planantes très longues. C'est le même effet que le lift qui permet, en football, de marquer des corners directs en brossant la balle ; ceci est impossible dans le vide, où le centre de gravité d'un projectile soumis à la pesanteur suivrait une parabole dans un plan vertical passant par le vecteur vitesse initial. Dans le cas d'un cylindre tournant dans un fluide, une portance existe aussi : c'est *l'effet Magnus*, et on a construit certains bateaux dont la voile était remplacée par un cylindre tournant.

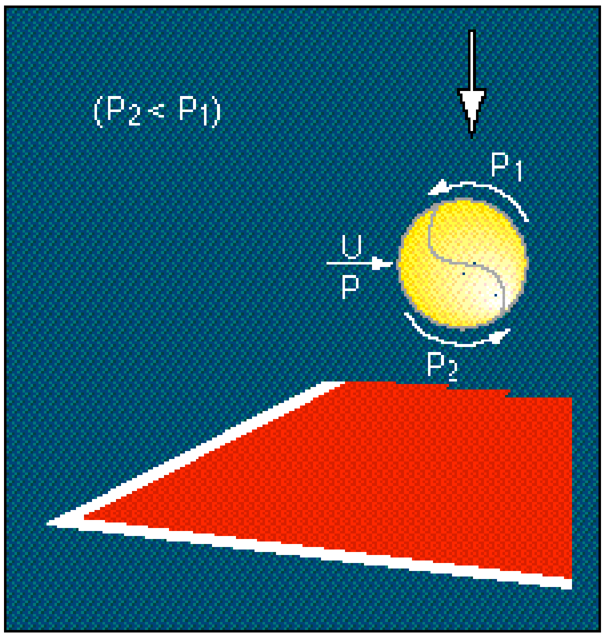

Figure 9 - "Lift" d'une balle de tennis.

Une autre application du principe de Bernoulli est la formule de Torricelli, permettant de calculer la vitesse de l'écoulement à la sortie du robinet d'un récipient, une barrique de vin par exemple. On trouve que la vitesse est la même que celle d'un point matériel tombant dans le vide d'une hauteur égale à celle du vin dans la barrique. La même formule appliquée à une conduite forcée s'écoulant d'un lac de montagne conduirait vite à des vitesses prohibitives (360 km / h pour un dénivelé de d'une véritable dynastie intellectuelle aux Etats-Unis, où la majorité des ténors de la mécanique des fluides et de la turbulence est constituée de "petits-enfants spirituels" (c'est-à-dire les élèves des élèves), ou même arrière petits-enfants, de von Karman. L. Prandtl est un autre très grand nom de la mécanique des fluides ; on lui doit en particulier la théorie de la couche limite laminaire[18], où les forces visqueuses sont simplifiées pour ne tenir compte que des variations perpendiculaires à la paroi. Il est aussi à l'origine des théories de la viscosité turbulente et de la longueur de mélange (voir chapitre V).

Revenons à notre allée tourbillonnaire ; en fait, le cylindre ralentit le fluide derrière lui, en sorte que, si l'on trace un profil de vitesse longitudinale en aval de l'obstacle, on va trouver un déficit de vitesse correspondant à la figure 10a, qui peut aussi s'interpréter comme une double couche de mélange. Ceci correspond à la superposition de deux nappes tourbillonnaires, l'une positive (en bas) et l'autre négative (en haut, voir figure 10b).

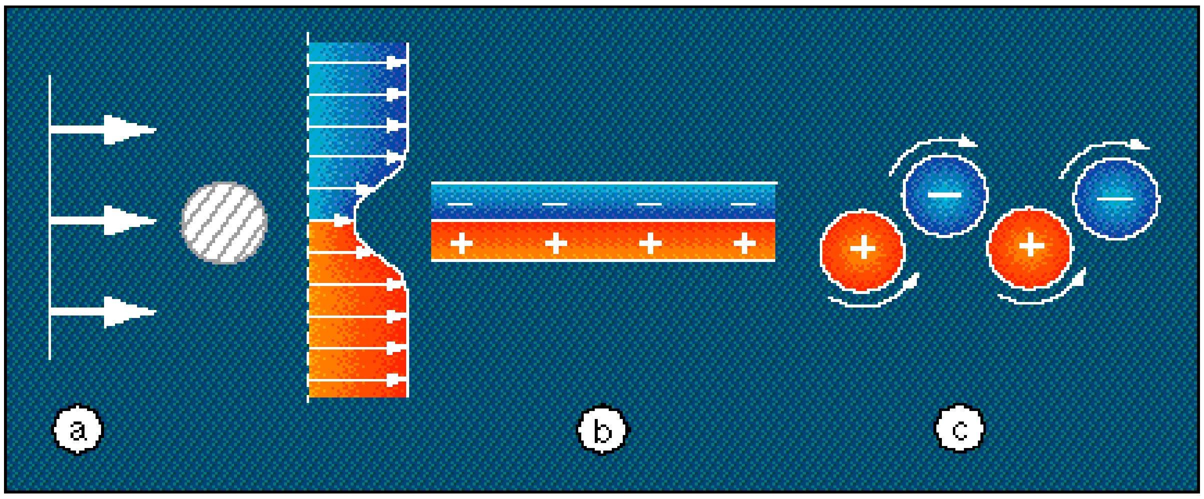

Figure 10 - Schéma du développement d'une allée de von Karman derrière un cylindre : (a) profil de vitesse, (b) double nappe tourbillonnaire, (c) tourbillons décalés.

Chacune de ces nappes va être soumise à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (déclenchée par de petites perturbations de vitesse existant dans l'écoulement, en particulier dans les couches limites au voisinage de l'obstacle), et dégénérer en une allée de tourbillons positifs (en bas) et négatifs (en haut, figure 10c). Sur cette figure, les tourbillons sont alternés ; c'est en effet une des caractéristiques de cette instabilité de sillage plan que les tourbillons de signe opposé soient en opposition de phase, c'est-à-dire décalés dans l'espace. On peut le montrer grâce aux théories d'instabilité linéaire évoquées plus haut ; ces théories prédisent pour la perturbation

18 L. Prandtl, *Ueber Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*, Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker Kongresses (Heidelberg, 1904), Leipzig (1905).

sont, comme nous allons le voir, imposées par la viscosité, et correspondent à l'*échelle de Kolmogorov*. Pour la définir, il nous faut d'abord introduire ce qui est peut-être la théorie la plus célèbre de la turbulence, due au grand mathématicien Russe Kolmogorov[4]. Nous commençons par supposer que la turbulence est une superposition de tourbillons spiraux de type Kelvin-Helmholtz[5] de longueur d'onde r pouvant varier sur une large gamme. Soit v_r une différence de vitesse typique au sein du tourbillon (voir la figure 2).

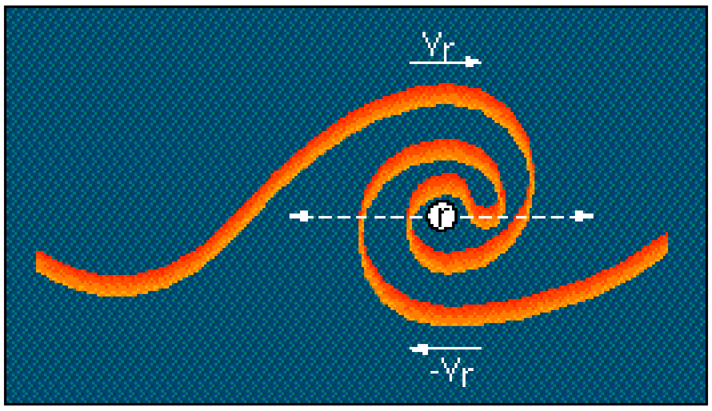

Figure 2 - Schéma d'un tourbillon d'échelle *r*.

La quantité v_r^2 est appelée la *fonction de structure* d'ordre deux des vitesses. Le temps $T_r = r/v_r$, appelé *temps de retournement du tourbillon*, donne un ordre de grandeur du temps mis par une parcelle fluide piégée dans ce tourbillon pour en faire un tour complet. L'hypothèse de *cascade d'énergie* de Kolmogorov suppose un quasi-équilibre : pendant le temps de retournement T_r, le tourbillon perd une certaine fraction $a(a < 1)$ de son énergie cinétique relative (par unité de masse) $1/2v_r^2$, par divers mécanismes d'instabilité qui contribuent à la création de tourbillons de taille inférieure à r. On peut mesurer cette perte par un taux ε_r, appelé *taux de dissipation d'énergie cinétique*, qui est égal à $(1/2)a\, v_r^2/T_r$. Le quasi-équilibre du tourbillon vient de ce qu'il reçoit simultanément de l'énergie des tourbillons plus gros, par des instabilités du même type. Cette hypothèse avait été proposée par Richardson en 1922, sous forme d'un sonnet

Les gros tourbillons ont de petits tourbillons,
Qui se nourrissent de leur vitesse,
Et les petits tourbillons en ont de plus petits,
Et c'est ainsi jusqu'à la viscosité.

---

4 A. Kolmogorov, *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **30**, pp 301-305, (1941).

5 La suite montrera que cette hypothèse est beaucoup moins naïve qu'elle n'y paraît.

Dans l'écoulement supersonique derrière une marche, une onde de choc oblique sera créée par l'arête de la marche. Dans un jet de réacteur supersonique (par rapport au réacteur), il y aura un cône de choc à la sortie de la buse. Signalons enfin ce que l'on appelle le régime transsonique, dans un écoulement autour d'un profil d'aile par exemple : à un nombre de Mach de l'ordre de 0,8, l'écoulement sur l'extrados de l'aile est accéléré, et devient localement supersonique avec la formation d'un choc attaché sur l'extrados. C'est ce qui se passe en régime de vol sur les Airbus A 320.

2.2.1. Chocs supersoniques et sillages

Il existe une analogie très intéressante entre le cône de choc d'un avion supersonique et le sillage d'un bateau sur la mer ou d'un canard se déplaçant à la surface d'une mare : si c est maintenant la vitesse des ondes de gravité à la surface de la mare, le canard va à chaque instant (par ses battements de pattes) exciter des vagues qui formeront des cercles dont le rayon croît proportionnellement au temps et à la vitesse c. Si la vitesse du canard U est plus petite que c (canard "subsonique"), il sera dépassé par les vagues qu'il a créées, et baignera dans celles-ci. Si U est plus grand que c (canard "supersonique"), il ne sera jamais rattrapé par les différents cercles des vagues : l'enveloppe de ces cercles ne sera plus un cône (comme pour les ondes sonores de l'avion supersonique), mais un dièdre de demi-angle au sommet donné par la même expression que pour l'avion supersonique. La surface de la mare est agitée par les vagues du canard à l'intérieur du dièdre, où elle a donc connaissance de la présence de l'animal. A l'extérieur du dièdre au contraire, rien n'indique (d'un point de vue hydrodynamique) la présence du volatile. Si le canard accélère, on voit le cône se refermer[11]. Il est certainement plus reposant, pour comprendre le bang supersonique des avions, d'observer canards, cygnes ou bateaux sur un plan d'eau.

Une autre analogie hydraulique des chocs supersoniques concerne les *ressauts hydrauliques*, quand de l'eau qui coule rapidement arrive en bas d'une pente[12]. C'est l'équivalent d'un choc droit en aérodynamique : avant le ressaut, l'eau coule plus vite que la vitesse des ondes de gravité $c=\sqrt{gh}$; après le ressaut, où la pression (donc la hauteur d'eau) est plus importante, l'eau coule moins vite que c.

11 S'il accélère encore plus, son sillage deviendra turbulent, et le dièdre s'incurvera en parabole.

12 Ce phénomène peut se produire aussi pour de l'air, quand les vents catabatiques dans l'antarctique débouchent sur l'océan.

2.2.1. *Equilibre géostrophique*

Nous considérons, sur la calotte mince sphérique constituant l'atmosphère, un tourbillon de vorticité (dans le repère lié à la terre) ω. On suppose que ce tourbillon (de rayon R) est à une latitude ϕ. Soit U la vitesse du fluide à l'extérieur du tourbillon. Il est facile de vérifier que la projection de la force de Coriolis sur le plan du tourbillon est $-f\vec{n}\times\vec{U}$, où

- $\vec{n}$ est le vecteur unitaire vertical local (voir figure 2 a),
- et $f = 2\,\Omega\sin\phi$ est appelé le *paramètre de Coriolis*.

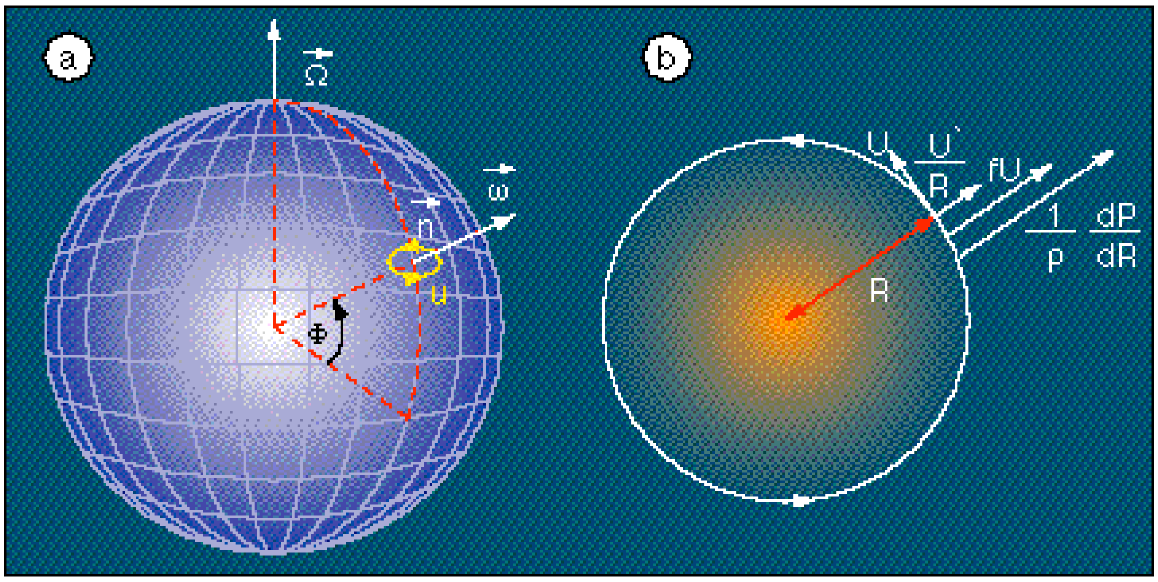

Figure 2 - Schéma d'un tourbillon en équilibre géostrophique.

La parcelle fluide de vitesse $\vec{U}$ (supposée de masse unité) est, dans le plan horizontal, en équilibre sous l'effet

- du gradient de pression $(1/\rho)\,dp/dR$,
- de la force de Coriolis horizontale,
- de la force centrifuge U^2/R dans son mouvement de rotation autour du tourbillon (figure 2b).

L'*équilibre géostrophique* concerne le cas où cette force centrifuge est négligeable devant la force de Coriolis, ce qui correspond à la relation

$$\frac{U}{fR} << 1\,. \qquad (2\text{-}1)$$

Sous cette condition, on obtient donc :

$$U = \frac{1}{\rho f}\,\frac{dp}{dR}\,, \qquad (2\text{-}2)$$

qui montre que, si le tourbillon est un minimum de pression, dp/dR sera positif, et la rotation sera cyclonique (U positif). Si le tourbillon est un maximum de pression,