

## Aperçu sur la théorie de la couche limite

### 1. Notion de couche limite

Plusieurs chapitres du livre décrivent des propriétés remarquables des couches limites présentes au voisinage des frontières d'un fluide en écoulement. C'est notamment le cas des chapitres 2 et 3 qui s'appuient sur certaines caractéristiques de la couche limite atmosphérique. C'est aussi le cas du chapitre 4 à propos de la couche limite présente sur les deux faces des ailes volantes. La figure A.10 de l'annexe du livre met en évidence le fort cisaillement et la vorticité présents dans cette région, au voisinage immédiat de la paroi où la vitesse s'annule.

On y distingue clairement les couches limites et l'écoulement extérieur, qui contourne une sorte de *corps total* comprenant l'aile elle-même, les couches d'intrados et d'extrados, ainsi que le sillage. Dans l'annexe, où l'on s'intéresse à la transition du régime laminaire vers le régime turbulent, l'accent est mis sur la couche d'extrados, qui devient instable à une courte distance du point d'arrêt amont et qui décolle de la paroi. Ici, regardons plutôt la couche d'intrados, c'est-à-dire celle située au-dessous de l'aile. Ses deux caractères prépondérants sont sa minceur par rapport à la corde de l'aile, et son caractère apparemment dépourvu de turbulence tout au long de l'aile.

La minceur de cette couche limite d'intrados, dont l'épaisseur typique sera notée  $\delta$ , est en effet son caractère prépondérant. Si l'on note  $\ell$  la corde de l'aile (distance entre le point d'arrêt amont et le point d'arrêt aval), dans l'exemple de la figure A10 le rapport  $\delta/\ell$  est au plus de 2 %. Cette visualisation a été réalisée dans des conditions telles que la couche la plus mince soit visible, c'est-à-dire dans un écoulement dont le nombre de Reynolds est modéré, tout en étant nettement supérieur à l'unité. Nous allons voir que ce rapport  $\delta/\ell$  peut devenir beaucoup plus petit dans les conditions réelles de vol des avions. Considérons le temps de transit  $\tau = \ell/U$  des particules fluides de l'écoulement extérieur, qui parcourent la distance  $\ell$  à la vitesse  $U$ . Pendant cette durée  $\tau$ , la viscosité a engendré à travers la couche limite une diffusion de la vorticité, dont la portée est  $\delta = \sqrt{\nu\tau}$ . Le rapport  $\delta/\ell$  est donc de l'ordre de  $\sqrt{\frac{\nu}{U\ell}} = Re^{-\frac{1}{2}}$ . Il apparaît ainsi que la couche

limite est d'autant plus mince que le nombre  $Re^{\frac{1}{2}}$  est plus grand. Dans l'encart E2.3 (voir Chapitre 2 du livre), il est précisé que le nombre de Reynolds de l'écoulement autour d'une aile d'avion est situé entre  $10^4$  et  $10^8$ . En conséquence, le rapport  $\delta/\ell$  est souvent voisin de  $10^{-3}$ , ce qui situe son épaisseur aux alentours du millimètre, alors que la corde de l'aile peut dépasser le mètre.

### 2. L'approximation de Prandtl

Ces ordres de grandeur imposent aux dérivées des composantes de la vitesse des valeurs très différentes, qui justifient des approximations fortes. Plaçons nous dans le cas simple d'une couche limite sur une plaque plane semi-infinie le long de laquelle l'abscisse est notée  $x$ , et perpendiculairement à laquelle l'ordonnée est notée  $y$ , comme schématisé sur la figure 1.

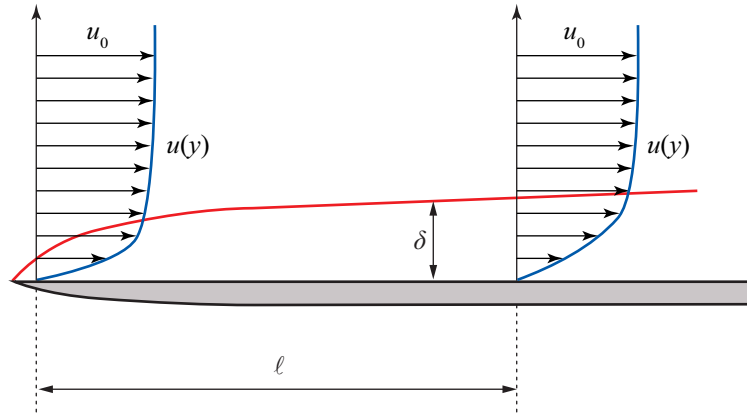


Figure 1. Schéma de la couche limite qui se développe le long d'une plaque plane semi-infinie, à partir du point d'arrêt amont.

Les dérivées secondes de la composante de vitesse  $u$  (suivant  $x$ ) ont pour ordres de grandeur respectifs  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{U}{\ell^2}$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U}{\delta^2}$ . La première est donc négligeable par rapport à la seconde dans le Laplacien de la vitesse, qui intervient dans l'équation du mouvement, multiplié par la viscosité. Par ailleurs, l'équation de continuité  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ , écrite en supposant le fluide incompressible et l'écoulement bidimensionnel, impose l'égalité des deux termes du premier membre, d'où l'on déduit l'ordre de grandeur de la composante de vitesse dans la direction  $y$  :  $v \approx \frac{U\delta}{\ell} \approx URe^{-\frac{1}{2}}$ . Cette petitesse de  $v$  par rapport à  $u$  entraîne aussi la petitesse de la composante  $\frac{\partial p}{\partial y}$ , au plus de l'ordre de  $\rho \frac{dv}{dt}$ , par rapport à  $\frac{\partial p}{\partial x}$  qui est de l'ordre de  $\rho \frac{du}{dt}$ . La variation de pression à travers la couche limite est donc négligeable. Ceci implique qu'en tout point, la pression doit être la même qu'à la frontière avec l'écoulement extérieur. Le gradient de pression est donc pratiquement longitudinal et sa valeur peut être dérivée de la relation de Bernoulli, tout à fait légitime à l'extérieur de la couche limite ( $\frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx}$ ) où la vitesse  $U(x)$  doit être considérée comme donnée.

Dans les écoulements permanents, où  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ , ces approximations réduisent donc le système général des équations du mouvement aux deux suivantes pour les inconnues  $u$  et  $v$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, & (1) \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla) u = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. & (2) \end{cases}$$

Ces équations sont souvent dénommées les équations de Prandtl, en hommage à celui qui fut le premier à dégager les approximations sur lesquelles elles sont fondées.

Associées aux conditions aux limites, qui imposent la nullité des deux composantes de vitesse à la paroi ( $u(x,0) = 0$ ,  $v(x,0) = 0$ ) et le raccordement de la composante  $u$  avec la vitesse de l'écoulement extérieur ( $u(x,\infty) = U$ ), ces équations (1) et (2) constituent ce qui est souvent appelé le *problème intérieur*. Le *problème extérieur* est alors celui du calcul de l'écoulement autour du

corps total (aile et couches limites). Dans le cas général, ces deux problèmes sont couplés. Mais dans le cas particulier de la plaque plane semi-infinie dans un milieu infini,  $U$  n'est autre que la vitesse uniforme de l'écoulement lointain. Elle est donnée *a priori*, et ces deux problèmes se découpent de façon élémentaire.

### 3. La couche de Blasius et les solutions auto-similaires

Le cas particulier de la plaque plane semi-infinie, d'incidence nulle, dans un milieu infini, présente un intérêt particulier, notamment sur le plan historique. Au début du 20<sup>ème</sup> siècle, il fut en effet l'objet d'efforts considérables pour résoudre analytiquement les équations de Prandtl, notamment parmi ses disciples, tout particulièrement par Blasius, avant que les méthodes numériques ne rendent cet enjeu tout à fait caduc. Plus généralement, si l'écoulement extérieur est accéléré, ou décéléré, c'est-à-dire dans un écoulement dont la vitesse  $U(x)$  est donnée, éventuellement non uniforme, cette famille de couches limites peut posséder une propriété d'auto-similarité fort intéressante.

Il est clair que les deux profils de vitesse représentés sur la figure 1 possèdent la même forme. Leur auto-similarité impliquerait qu'avec de simples changements d'échelles il soit possible de les ramener à une courbe unique, autrement dit que les solutions puissent être mises sous la forme :

$$\frac{u(x,y)}{U(x)} = f(\eta), \text{ où } \eta = \frac{y}{\delta(x)}. \quad (3)$$

En introduisant la primitive de la fonction  $f(\eta)$  qui s'annule à l'origine  $F(\eta) = \int_0^\eta f(t) dt$ , liée à la fonction de courant  $\psi(x,y)$  par  $F(\eta) = \frac{\psi(x,y)}{U\delta}$ , les équations de Prandtl peuvent se ramener à

l'équation

$$F''' + \frac{U\delta\delta'}{\nu} \left( FF'' - \frac{U'\delta}{U\delta'} (F'^2 - FF'' - 1) \right) = 0. \quad (4)$$

Les conditions aux limites associées sont simplement

$$F(0) = F'(0) = 0, \quad F'(\infty) = 1. \quad (5)$$

La condition qui permet l'auto-similarité, c'est-à-dire qui permet à la fonction  $F$  et à ses dérivées de ne dépendre que de  $\eta$  et d'être indépendantes de  $x$ , est simple : il faut que les coefficients formés avec les fonctions  $U(x)$  et  $\delta(x)$  soient constants. Si tel est le cas, l'équation (4) se ramène à une équation différentielle ordinaire du troisième ordre. L'invariance des coefficients impose que la fonction  $U(x)$  soit de la forme  $Kx^m$ . On peut alors choisir pour l'échelle de longueur  $\delta(x)$  la définition  $\delta = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$  et, pour toute valeur du paramètre  $m$ , le problème se ramène à la recherche de la solution de l'équation suivante, connue sous le nom d'équation de Falkner-Skan, qui vérifie les conditions (5) :

$$F''' + \frac{m+1}{2} FF'' - m(F'^2 - 1) = 0. \quad (6)$$

Même dans le cas le plus simple, celui de la couche de Blasius, où  $m = 0$ , la résolution de cette équation n'est pas à la portée de méthodes analytiques simples. Ceci tient à son caractère non-linéaire, qui en est une caractéristique profonde, puisqu'il provient des termes d'accélération déjà présents dans l'équation de départ (2). A titre d'exemple, on verra ci-dessous un échantillon des solutions calculées numériquement pour diverses valeurs du paramètre  $m$  sur la figure 2.

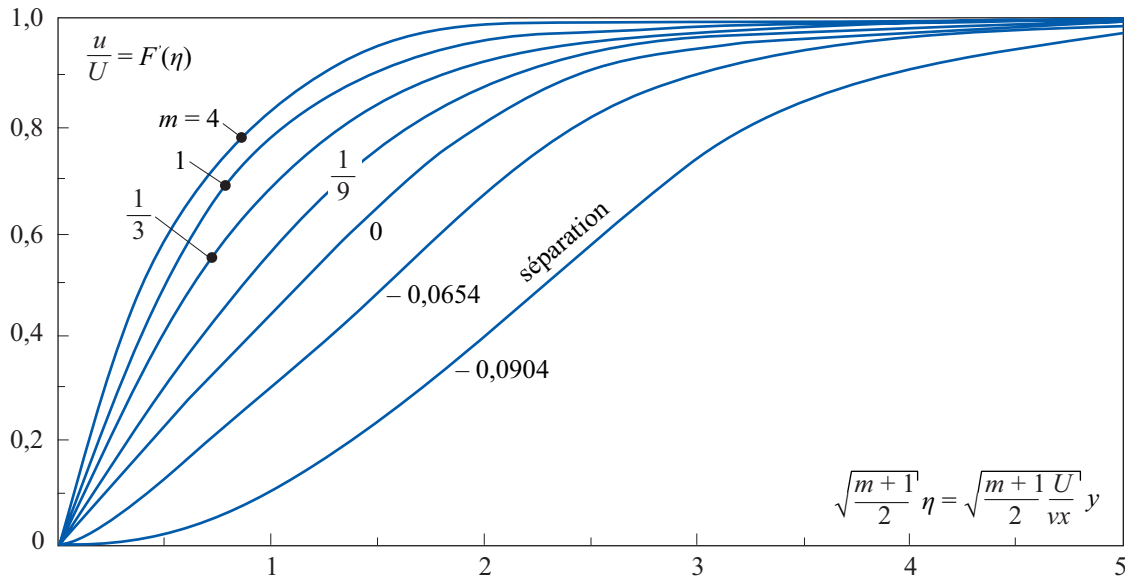


Figure 2. Profils de vitesse auto-similaires calculés numériquement pour diverses valeurs du paramètre  $m$ . Les valeurs inférieures à  $-0,0904$  n'auraient pas grande signification car elles correspondraient à des couches limites décollées de la paroi.

Les valeurs positives correspondent à des couches limites accélérées, les valeurs négatives à des couches décélérées. Dans le cas de l'écoulement uniforme aligné avec la plaque plane, où  $m = 0$ , on notera la valeur de la pente du profil de vitesse à la paroi ( $F''(0) = 0,33206$ ), qui permet le calcul de la contrainte tangentielle, c'est-à-dire du frottement visqueux :

$$\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = F''(0) \rho U^2 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}}. \quad (7)$$

Le cas  $m = -0,0904$  correspond à la limite du décollement, tel que la pente du profil de vitesse à la paroi soit nulle. Et la valeur  $m = 1$  correspond au cas d'une paroi perpendiculaire à la direction  $x$ , c'est-à-dire au voisinage du point d'arrêt amont d'un obstacle relativement mal profilé.

#### 4. Commentaire sur les couches limites autour des obstacles

L'écoulement autour des obstacles réels, que ce soit les ailes dotées d'une certaine finesse mais avec une incidence non nulle, ou les obstacles plus massifs comme les véhicules routiers, fait apparaître des couches limites au sein desquelles la forme du profil de vitesse évolue. Elles échappent donc à la classe des couches limites descriptibles avec des solutions auto-similaires. Près du point d'arrêt amont, la couche limite est à la fois très mince et fortement accélérée dans un gradient de pression négatif. Plus loin le long de la paroi, dans la région où la vitesse de l'écoulement extérieur atteint son maximum et où le gradient de pression change de signe, le profil de vitesse atteint une forme proche de celle de la couche de Blasius. L'épaisseur de la couche limite

atteint alors un ordre de grandeur adimensionnel  $\delta / \ell$  voisin de  $\sqrt{\frac{\nu}{U\ell}}$ , où  $U$  désigne la vitesse de

l'écoulement lointain et  $\ell$  l'épaisseur caractéristique de l'obstacle. Si l'écoulement extérieur est laminaire, ce qui est le cas lorsque l'obstacle se meut dans un fluide lointain au repos, la couche limite accélérée demeure stable et laminaire entre le point d'arrêt amont et le point de vitesse maximale. Par contre, dans une soufflerie, dans une conduite, en mer, ou bien dans un fleuve, où l'écoulement est déjà turbulent, lorsque l'on introduit un obstacle la couche limite qui se forme autour de lui est immédiatement marquée par la turbulence environnante, même si l'influence de la viscosité y demeure prépondérante.

A l'aval de cette première région, la vitesse extérieure diminue et la pression croît à nouveau. La couche limite évolue alors dans un gradient de pression devenu positif, c'est à dire adverse. Or, en luttant contre le frottement visqueux, les tranches fluides ont progressivement perdu leur quantité de mouvement. Dans le cas des écoulements autour d'obstacles épais, elles n'en possèdent plus assez pour remonter ce gradient de pression adverse et se séparent de la paroi. Ce décollement qui se produit même à des nombres de Reynolds relativement modérés, voisins de la centaine, est mis en évidence sur la figure A8.a, dans l'annexe du livre. La figure A8.b montre d'ailleurs qu'à des nombres de Reynolds plus élevés il devient instationnaire, marqué par le rythme périodique des lâchers des tourbillons qui constituent ensuite la rue de von Karman (voir aussi la figure A9 dans l'annexe).

L'instabilité des couches limites autour des obstacles épais est un autre fait marquant de leur évolution. Elle conduit, par un cheminement complexe résumé dans la section 4.a de l'annexe du livre, à l'apparition de la turbulence. Bornons-nous ici à regarder la figure A10, qui met clairement en évidence cette transition à la turbulence sur l'extrados de l'aile, tout à fait analogue à la région située à l'aval d'un obstacle mal profilé. On distingue la présence de gros tourbillons, relativement bien organisés, dans un ensemble de structures turbulentes de tailles très diverses et de forme plus ou moins filamenteuse. Malgré leur complexité, ces couches limites turbulentes sont maintenant bien connues. Elles ont d'abord fait l'objet d'investigations expérimentales approfondies. Et, depuis la fin du 20<sup>ème</sup> siècle, elles sont aussi accessibles au calcul numérique, soit en ne mettant l'accent que sur les valeurs moyennes, soit en simulant aussi les fluctuations turbulentes. En particulier, la simulation des fluctuations de pression sur les ailes des avions permet d'estimer leurs vibrations et d'évaluer l'intensité des secousses auxquelles l'appareil est soumis.