

La couche d'Ekman

Les mouvements atmosphériques à grande échelle, comme les vents alizés et les cellules de Hadley ou de Ferrel, sont fortement influencés par la force de Coriolis. Très loin des frontières que constituent le sol et la surface des mers, ces mouvements sont régis par les lois de l'équilibre géostrophique, discutées au chapitre 2 et illustrées par les figures 2.8.a et 2.8.b du livre. Par contre, à proximité de ces frontières, la viscosité vient perturber ces lois en imposant la présence d'une couche limite aux propriétés spectaculaires, résumées dans l'encart 2.4 inséré dans le chapitre 2. Une couche limite analogue est présente dans les océans, au-dessous de leur surface, évoquée elle aussi brièvement au chapitre 2. On trouvera ci-dessous des justifications plus précises des propriétés respectives de ces écoulements.

1. Les équations des écoulements plans soumis à la force de Coriolis

Les notations utilisées pour représenter la vitesse angulaire de la Terre autour de son axe (Ω), ainsi que ses composantes ω dans la direction de la verticale locale (Oz) et ω' dans la direction horizontale (Ox), sont représentées sur la figure 1.

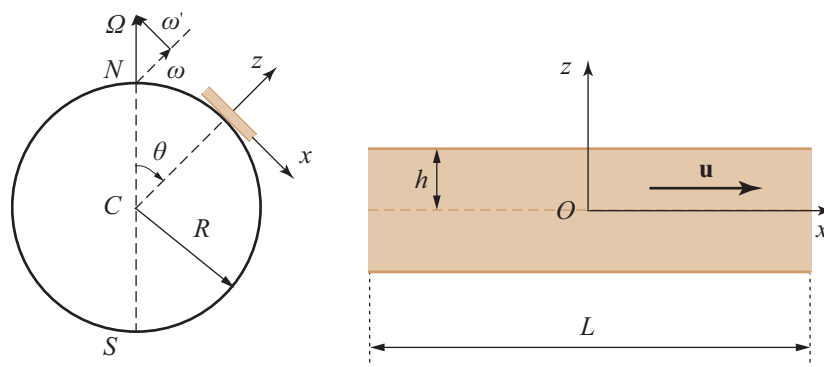


Figure 1. Notations utilisées pour caractériser les écoulements atmosphériques ou marins soumis à la force de Coriolis, à gauche à l'échelle de la Terre, à droite à l'échelle de la couche concernée.

On considère des écoulements atmosphériques ou marins, dont l'échelle horizontale L est à la fois très grande par rapport à l'épaisseur h de la couche fluide, celle de la troposphère ou d'un océan, et beaucoup plus petite que le rayon de la planète R : $h \ll L \ll R$. La direction de la vitesse du fluide peut alors être supposée horizontale, en négligeant la composante verticale w par rapport aux autres composantes u et v . En effet, si U désigne l'échelle typique des vitesses horizontales, l'équation de continuité impose $w \approx \frac{Uh}{L}$. Les deux composantes de l'accélération de Coriolis s'écrivent alors

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega' = -\Omega \sin \theta \\ 0 \\ \omega = \Omega \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

et celles de l'accélération de Coriolis s'en déduisent immédiatement :

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2\omega v \\ 2\omega u \\ 2\omega'v \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Il apparaît clairement que seule la composante suivant la verticale locale de la rotation de la Terre (ω) intervient dans les deux composantes horizontales de cette accélération.

Dans le cadre des hypothèses faites, et en désignant par p une pression généralisée qui inclut les effets de la gravité et ceux de la force centrifuge ($p = p_{\text{stat}} + \rho g z - \frac{\rho \Omega^2 R^2 \sin^2 \theta}{2}$), les équations du mouvement projetées dans le plan horizontal s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \end{cases} \quad (3)$$

Avec des conditions initiales et aux limites convenables, elles permettent de déterminer les inconnues u et v , dès lors que le gradient de pression horizontal \mathbf{G} est donné. L'équation dans la direction verticale Oz aurait pour seule conséquence la détermination de la composante verticale du gradient de pression une fois la vitesse connue. Dans ce qui suit, intéressons-nous plus spécifiquement à des phénomènes où les composantes du gradient de pression horizontal \mathbf{G} sont données.

En désignant par τ l'échelle de temps caractéristique des phénomènes auxquels on s'intéresse, et par δ l'épaisseur caractéristique sur laquelle la viscosité est capable de diffuser la quantité de mouvement, les ordres de grandeur respectifs des trois termes des équations (3) sont : $(U/\tau), \omega U, (vU/\delta^2)$. Lorsque l'on souhaite analyser la réponse immédiate du fluide à une sollicitation soudaine, la premier terme est prépondérant par rapport à l'accélération de Coriolis et la couche fluide concernée a l'épaisseur $\delta \approx \sqrt{\nu\tau}$. Par contre, sur des durées nettement plus longues que ω^{-1} , plusieurs jours en l'occurrence, c'est la dérivée partielle $\partial \mathbf{u} / \partial t$ qui devient négligeable par rapport à la force de Coriolis. L'écoulement engendré par le gradient de pression imposé peut alors se décomposer en deux régions distinctes. Au loin la diffusion visqueuse est négligeable, l'écoulement est strictement géostrophique et il est déterminé par la relation $2\rho\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \mathbf{G}$. A proximité de la frontière, une couche limite dominée par la force de Coriolis est présente, dont l'épaisseur δ est nécessairement de l'ordre de $\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$. Dans les sections suivantes, nous allons examiner plus précisément deux situations particulières.

2. La couche d'Ekman dans l'atmosphère

Choisissons pour direction Ox celle du vent uniforme et stationnaire en altitude, dont la vitesse est notée U . Conformément à l'équation des mouvements géostrophiques, ceci implique l'existence d'un gradient de pression G dans la direction Oy , tel que

$$2\omega U = \frac{G}{\rho}. \quad (4)$$

Aux altitudes assez faibles pour que le frottement visqueux soit significatif, les équations (3) deviennent :

$$-2\omega v = v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad 2\omega u = v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{G}{\rho}. \quad (5)$$

Introduisons la variable complexe $u - U + iv$, où $i^2 = -1$, et substituons la dans ces équations (4) et (5). Elle vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(u - U + iv) - 2i\frac{\omega}{v}(u - U + iv) = 0, \quad (6)$$

dont les solutions compatibles avec les conditions aux limites ($u = U$ et $v = 0$ si $z \rightarrow \infty$; $u = v = 0$ si $z = 0$) s'écrivent :

$$\frac{u}{U} = 1 - \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{v}}z\right) \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{v}}z\right), \quad \frac{v}{U} = \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{v}}z\right) \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{v}}z\right). \quad (7)$$

Ces expressions permettent de vérifier que la direction du vent au voisinage du sol, où $\sqrt{\frac{\omega}{v}}z \ll 1$, est orientée à 45° de l'axe Ox , et que cet angle diminue progressivement quand l'altitude croît, formant ainsi la spirale d'Ekman. Ceci est illustré dans la figure 2.10 du chapitre 2 du livre, qui est reprise sur la figure 2 ci-après.

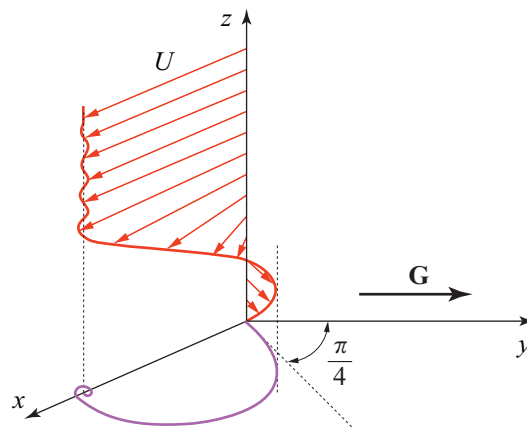


Figure 2. Allure de la distribution de vitesse dans la couche d'Ekman atmosphérique et spirale d'Ekman dans le plan horizontal.

Elles mettent en évidence l'épaisseur caractéristique de cette couche, de l'ordre de $\sqrt{\frac{v}{\omega}}$. Elles montrent aussi que le débit déficitaire dans la direction Ox est exactement égal au débit forcé dans la direction Oy , ce qui signifie que, à la différence de la couche de Blasius, sous l'effet de la force de Coriolis, cette couche limite ne déplace pas les lignes de courant vers de plus hautes altitudes, mais tend à les réorienter vers la direction Oy :

$$\int_0^\infty (U - u) dz = \int_0^\infty v dz = \frac{U}{2} \sqrt{\frac{v}{\omega}}. \quad (8)$$

3. La couche d'Ekman sous la surface libre des océans

Pour mettre en évidence l'influence de la force de Coriolis sur les courants de surface engendrés dans les océans par le vent, considérons la situation simple suivante. Une couche fluide d'épaisseur semi-infinie, limitée par une surface libre à l'altitude $z = 0$, est soumise à une contrainte tangentielle τ_0 sur cette surface. Nous admettons aussi que la pression généralisée introduite plus haut est uniforme et qu'en profondeur ($z < 0$) aucun courant n'existe. La formulation du problème, voisine de celle de la section précédente mais légèrement différente, s'écrit alors comme suit :

$$\begin{cases} -2\omega v = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ 2\omega u = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_0}{\mu}, & \frac{\partial v}{\partial z} = 0, & \text{si } z = 0, \\ u = v = 0, & & \text{si } z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (9)$$

Introduisons la variable complexe $u + iv$. Les équations (9) lui imposent de satisfaire à l'équation combinée

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(u + iv) - 2i\frac{\omega}{\nu}(u + iv) = 0, \quad (10)$$

et la solution vérifiant les conditions aux limites s'écrit :

$$\begin{cases} u = \frac{\tau_0}{\rho\sqrt{2\nu\omega}} \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}z\right) \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}z - \frac{\pi}{4}\right), \\ v = \frac{\tau_0}{\rho\sqrt{2\nu\omega}} \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}z\right) \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}z - \frac{\pi}{4}\right). \end{cases} \quad (11)$$

L'épaisseur caractéristique de cette couche $\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ suit une loi analogue à celle de la couche atmosphérique. Le débit à travers un plan vertical vérifie

$$\int_{-\infty}^0 (u + iv) dz = -i \frac{\tau_0}{2\rho\omega}. \quad (12)$$

On remarquera qu'il est indépendant de la viscosité. Par ailleurs, le fait que sa partie réelle soit nulle signifie que la force de Coriolis réoriente ce débit dans la direction Oy , perpendiculaire à la direction du vent générateur du courant de surface, la vitesse de surface étant orientée à -45° , comme le montre la figure 3 :

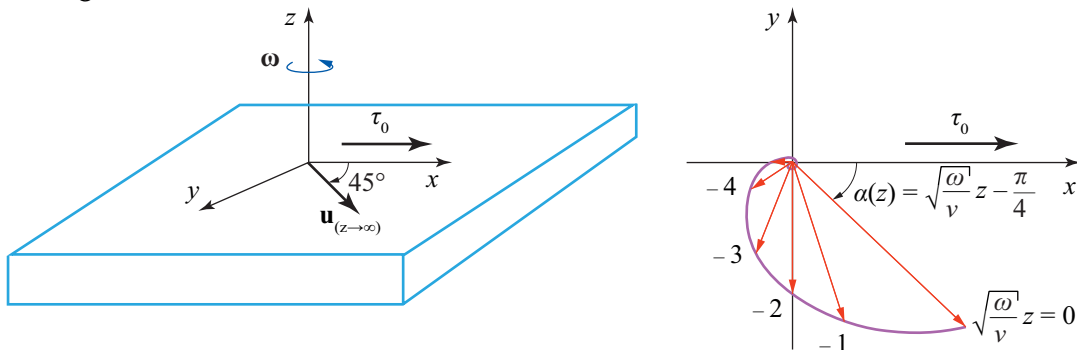


Figure 3. Gauche : directions respectives du frottement moteur et de la vitesse de surface. Droite : spirale d'Ekman pour la couche limite sous la surface libre d'un océan.

Complétons ces résultats par quelques valeurs caractéristiques. Puisque $\Omega \approx \frac{2\pi \text{ radians}}{24 \text{ heures}}$, soit

$7.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$ dans l'eau ($\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$), l'épaisseur de la couche d'Ekman purement laminaire serait voisine de 15 cm. Dans l'air ($\nu \approx 0,14.10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$), elle serait inférieure à la dizaine de mètres. Les observations montrent qu'en réalité elles sont voisines de la dizaine de mètres dans l'eau et de 500 mètres dans l'air. Ces rapports élevés reflètent le rôle efficace de la turbulence qui rend la viscosité effective très supérieure à la viscosité moléculaire, par un facteur de l'ordre de 10^3 à 10^4 dans l'eau comme dans l'air.